

# MINIMUM PENUTUP TITIK DAN MINIMUM PENUTUP SISI PADA GRAF KOMPLIT DAN GRAF BIPARTIT KOMPLIT

Yessi Riskianda Kusumawardani

Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,  
e-mail : [yezzy\\_zeecha@yahoo.co.id](mailto:yezzy_zeecha@yahoo.co.id)

Budi Rahadjeng, M.Si.

Program Studi S1 Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Surabaya,  
e-mail : [rahajeng13@yahoo.com](mailto:rahajeng13@yahoo.com)

## Abstrak

Penutup titik graf  $G$  adalah himpunan titik  $C \subseteq V(G)$  sedemikian hingga setiap sisi di  $G$  terkait langsung dengan paling sedikit satu titik di  $C$ . Penutup titik dikatakan minimal pada graf  $G$  jika tidak ada penutup titik  $C'$  pada  $G$  sedemikian hingga  $|C'| < |C|$ . Ukuran minimum penutup titik pada graf  $G$  dilambangkan dengan  $\alpha(G)$ . Penutup sisi graf  $G$  adalah himpunan sisi  $Q \subseteq E(G)$  sedemikian hingga setiap titik di  $G$  terkait langsung dengan paling sedikit satu sisi di  $Q$ . Penutup sisi dikatakan minimal pada graf  $G$  jika tidak ada penutup sisi  $Q'$  pada  $G$  sedemikian hingga  $|Q'| < |Q|$ . Ukuran minimum penutup sisi pada graf  $G$  dilambangkan dengan  $\alpha_1(G)$ . Skripsi ini bertujuan untuk membuktikan ukuran minimum penutup titik dan ukuran minimum penutup sisi pada graf komplit dan graf bipartit komplit.

**Kata kunci:** penutup titik, penutup sisi, graf komplit, graf bipartit komplit.

## Abstract

A vertex cover of graph  $G$  is a set of vertices  $C \subseteq V(G)$  such that each edge in  $G$  has at least one vertex incident in  $C$ . A vertex cover is called minimum in graph  $G$  if there isn't vertex cover  $C'$  of  $G$  such that  $|C'| < |C|$ , and its size is denoted by  $\alpha(G)$ . An edge cover of graph  $G$  is a set of edges  $Q \subseteq E(G)$  such that each vertex in  $G$  has at least one edge incident in  $Q$ . An edge cover is called minimum in graph  $G$  if there isn't edge cover  $Q'$  of  $G$  such that  $|Q'| < |Q|$ , and its size is denoted by  $\alpha_1(G)$ . This paper aims to prove a minimum size vertex cover and a minimum size edge cover on complete graph and complete bipartite graph.

**Keyword:** vertex cover, edge cover, complete graph, complete bipartite graph.

## 1. PENDAHULUAN

Graf didefinisikan sebagai pasangan himpunan  $(V, E)$  dengan  $V$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga yang disebut titik dan  $E$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan titik-titik di  $V$  yang disebut sisi. Penutup titik dari graf  $G$  adalah himpunan titik  $C \subseteq V(G)$  sedemikian hingga setiap sisi di  $G$  terkait langsung dengan paling sedikit satu titik di  $C$ . Penutup titik dikatakan minimal pada graf  $G$  jika tidak ada penutup titik  $C'$  pada  $G$  sedemikian hingga  $|C'| < |C|$ . Ukuran minimum penutup titik pada graf  $G$  dilambangkan dengan  $\alpha(G)$ . Penutup sisi dari graf  $G$  adalah himpunan sisi  $Q \subseteq E(G)$  sedemikian hingga setiap titik di  $G$  terkait langsung dengan paling sedikit satu sisi di  $Q$ . Penutup sisi dikatakan minimal pada graf  $G$  jika tidak ada penutup sisi  $Q'$  pada  $G$  sedemikian hingga  $|Q'| < |Q|$ . Ukuran minimum penutup sisi pada graf  $G$  dilambangkan dengan  $\alpha_1(G)$ .

Beberapa penelitian yang mengkaji tentang penutup diantaranya adalah jurnal yang berjudul "On Minimum Vertex Covers in the Generalized Petersen Graph" oleh

Mehdi Behzad, Pooya Hatami, dan E. S. Mahmoodian membahas tentang sifat-sifat dari penutup titik pada graf Petersen diperumum  $P(n, 2)$ , dan jurnal "Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Bintang  $(m)_C S_n^k$  dan Graf Roda  $(m)_C W_n^k$ " oleh Nurul Hijriyah dari UNIBRAW dan Wahyu H. Irawan dari UIN Malang. Berdasarkan latar belakang tersebut penulis ingin melakukan kajian tentang minimum penutup titik dan minimum penutup sisi pada graf komplit dan graf bipartit komplit

## 2. LANDASAN TEORI

### Definisi 1

Graf  $G$  adalah pasangan himpunan  $(V, E)$  dengan  $V$  adalah himpunan tidak kosong dan berhingga yang disebut titik dan  $E$  adalah himpunan (mungkin kosong) pasangan tak berurutan titik-titik di  $V$  yang disebut sisi. Himpunan titik di  $G$  dinotasikan dengan  $V(G)$  dan himpunan sisi dinotasikan dengan  $E(G)$ .

### Definisi 2

Jika  $e = uv$  adalah sisi pada graf  $G$ , maka  $u$  dan  $v$  adalah titik yang berhubungan langsung (*adjacent*), sisi  $e$  terkait langsung (*incident*) dengan titik  $v$  dan titik  $u$

### Definisi 3

Sebuah graf komplit (graf lengkap) dengan  $n$  titik, dilambangkan dengan  $K_n$ , adalah graf yang tidak mempunyai sisi rangkap dan gelung dengan  $n$  titik dan setiap dua titik berbeda dihubungkan dengan sebuah sisi.

### Definisi 4

Sebuah graf  $G$  disebut graf bipartit jika himpunan titik di  $G$  dapat dipartisi menjadi dua himpunan bagian  $A$  dan  $B$  sedemikian hingga setiap sisi  $G$  menghubungkan sebuah titik di  $A$  dan sebuah titik di  $B$ ,  $(A, B)$  disebut partisi dari  $G$ .

### Definisi 5

Jika graf  $G$  sederhana dan bipartit dengan partisi  $(A, B)$  sedemikian hingga setiap titik di  $A$  berhubungan langsung dengan setiap titik di  $B$ , maka  $G$  disebut graf bipartit komplit, dilambangkan dengan  $K_{m,n}$  dimana  $|A| = m$  dan  $|B| = n$ .

### Definisi 6

Penutup titik graf  $G$  adalah himpunan titik  $C \subseteq V(G)$  sedemikian hingga setiap sisi di  $G$  terkait langsung dengan paling sedikit satu titik di  $C$ . Penutup titik  $C$  dikatakan minimal pada graf  $G$  jika tidak ada penutup titik  $C'$  pada  $G$  sedemikian hingga  $|C'| < |C|$ . Ukuran minimum penutup titik pada graf  $G$  dilambangkan dengan  $\alpha(G)$ .

### Definisi 7

Penutup sisi graf  $G$  adalah himpunan titik  $Q \subseteq E(G)$  sedemikian hingga setiap titik di  $G$  terkait langsung dengan paling sedikit satu sisi di  $Q$ . Penutup sisi  $Q$  dikatakan minimal pada graf  $G$  jika tidak ada penutup sisi  $Q'$  pada  $G$  sedemikian hingga  $|Q'| < |Q|$ . Ukuran minimum penutup sisi pada graf  $G$  dilambangkan dengan  $\alpha_1(G)$ .

## 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

### 3.1 Minimum Penutup Titik dan Sisi Graf Komplit

#### Lemma 1:

$$\alpha(K_n) = n - 1$$

Bukti:

Misalkan  $V(K_n) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ . Misalkan  $C$  adalah penutup titik  $K_n$ . Klaim  $C = \{v_i | 1 \leq i \leq n - 1\}$ . Akan ditunjukkan bahwa  $C$  adalah minimum penutup

titik. Berdasar definisi graf komplit  $|E(K_n)| = \frac{n(n-1)}{2}$ , sisi-sisi yang terkait dengan titik  $v_1$  adalah  $v_1 v_2, v_1 v_3, v_1 v_4, \dots, v_1 v_n$  sehingga  $v_1$  menutup/mengcover (untuk selanjutnya dalam makalah ini digunakan istilah mengcover)  $n - 1$  sisi  $K_n$ . Sisi-sisi yang terkait dengan titik  $v_2$  adalah  $v_2 v_1, v_2 v_3, v_2 v_4, \dots, v_2 v_n$  sehingga  $v_2$  mengcover  $n - 1$  sisi  $K_n$ . Tetapi karena sisi  $v_2 v_1$  sudah tercover oleh titik  $v_1$  maka titik  $v_2$  mengcover  $n - 2$  sisi  $K_n$ . Sisi-sisi yang terkait dengan titik  $v_{n-1}$  adalah  $v_{n-1} v_1, v_{n-1} v_2, v_{n-1} v_3, \dots, v_{n-1} v_n$ , karena sisi  $v_{n-1} v_1, v_{n-1} v_2, v_{n-1} v_3, \dots, v_{n-1} v_{n-2}$  telah tercover oleh titik  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-2}$  maka titik  $v_{n-1}$  mengcover  $n - (n - 1)$  sisi. Demikian juga dengan titik  $v_n$ , sisi-sisi yang terkait pada titik  $v_n$  adalah  $v_n v_1, v_n v_2, v_n v_3, \dots, v_n v_{n-1}$  sehingga  $v_n$  mengcover sisi  $v_n v_j$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n$  dan  $j \neq n$ . Tetapi karena sisi  $v_n v_1, v_n v_2, v_n v_3, \dots, v_n v_{n-1}$  sudah tercover oleh titik  $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$  maka titik  $v_n$  tidak mengcover sisi  $K_n$ . Sehingga diperoleh banyaknya sisi yang tercover oleh titik di  $C$  adalah

$$\begin{aligned} & (n - 1) + (n - 2) + (n - 3) + \dots + (n - (n - 1)) \\ &= n(n - 1) - (1 + 2 + 3 + \dots + n - 1) \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Dengan demikian semua sisi  $K_n$  telah tercover oleh titik-titik di  $C$ ,  $|C| = n - 1$ .  $C$  adalah minimum penutup titik dari  $K_n$  karena tidak ada penutup titik  $C'$  pada  $K_n$  sedemikian hingga  $|C'| < |C|$ .

Berdasarkan bukti diatas maka diperoleh  $\alpha(K_n) = |C| = n - 1$

#### Lemma 2:

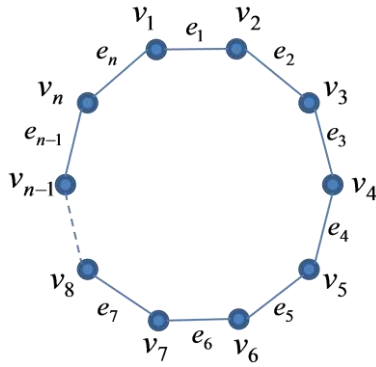
$$\alpha_1(K_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

Bukti:

Misalkan  $V(K_n) = \{v_i | 1 \leq i \leq n\}$ .

1.  $n = \text{genap}$

Andaikan  $Q$  adalah penutup sisi  $K_n$ . Klaim  $Q = \{e_i | 1 \leq i \leq n - 1, i \text{ ganjil}\}$ . Akan ditunjukkan bahwa  $Q$  adalah minimum penutup sisi. Pandang siklus luar graf komplit yaitu  $C : v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n, v_1$ .



Gambar 3.1 Sikel  $C$

Sisi  $e_i$  merupakan sisi yang menghubungkan titik  $v_i$  dan titik  $v_{i+1}$ . Sisi  $e_1$  dipilih oleh  $Q$  maka  $e_1$  mengcover titik  $v_1$  dan  $v_2$ . Jika sisi  $e_2$  dipilih oleh  $Q$  maka sisi  $e_2$  mengcover titik  $v_2$  dan  $v_3$  tetapi karena titik  $v_2$  telah tercover oleh sisi  $e_1$  maka sisi  $e_2$  tidak dipilih oleh  $Q$ . Seterusnya sampai sisi  $e_{n-2}$  dipilih oleh  $Q$  maka  $e_{n-2}$  mengcover titik  $v_{n-2}$  dan  $v_{n-1}$ , sisi  $e_n$  tidak dipilih  $Q$  karena titik  $v_1$  dan titik  $v_n$  telah tercover oleh sisi  $e_1$  dan  $e_{n-2}$ . Demikian juga dengan sisi-sisi dengan label berindeks ganap lainnya tidak dipilih oleh  $Q$  karena semua titik di  $V(K_n)$  telah tercover oleh sisi  $e_i, i$  ganjil. Sehingga diperoleh penutup sisi  $Q = \{e_1, e_3, e_5, \dots, e_{n-1}\}, |Q| = \frac{n}{2}$  untuk  $n$  genap.  $Q$  merupakan minimum penutup sisi  $K_n$  karena tidak ada penutup sisi  $Q'$  pada  $K_n$  sedemikian hingga  $|Q'| < |Q|$ .

Sehingga diperoleh:  $\alpha_1(K_n) = |Q| = \frac{n}{2}$

2.  $n$  ganjil

Andaikan  $Q$  adalah penutup sisi  $K_n$ . Klaim  $Q = \{e_i | 1 \leq i \leq n-1, i \text{ ganjil}\}$ . Pandang sikel luar graf komplit yaitu  $C : v_1, v_2, v_3, v_4, \dots, v_n, v_1$ , gambar 3.1. Sisi  $e_1$  dipilih oleh  $Q$  maka  $e_1$  mengcover titik  $v_1$  dan  $v_2$ . Jika sisi  $e_2$  dipilih oleh  $Q$  maka sisi  $e_2$  mengcover titik  $v_2$  dan  $v_3$  tetapi karena titik  $v_2$  telah tercover oleh sisi  $e_1$  maka sisi  $e_2$  tidak dipilih oleh  $Q$ . Sisi  $e_3$  dipilih oleh  $Q$  maka  $e_3$  mengcover titik  $v_3$  dan  $v_4$ . Demikian juga dengan sisi-sisi dengan label berindeks ganap lainnya tidak dipilih oleh  $Q$ . Sehingga diperoleh penutup sisi  $Q = \{e_1, e_3, e_5, \dots, e_{n-1}\}, |Q| = \frac{n+1}{2}$ .  $Q$  merupakan minimum penutup sisi  $K_n$  karena tidak ada penutup sisi  $Q'$  pada  $K_n$  sedemikian hingga  $|Q'| < |Q|$ .

Berdasarkan 1 dan 2 diperoleh:

$$\alpha_1(K_n) = \begin{cases} \frac{n}{2} & , \text{ untuk } n \text{ genap} \\ \frac{n+1}{2} & , \text{ untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

### 3.2 Minimum Penutup Titik dan Sisi pada Graf Bipartit Komplit

#### Lemma 3:

Ukuran minimum penutup titik pada graf bipartit komplit  $K_{m,n}$  dengan partisi  $(M, N)$  dimana  $|M| = m$  dan  $|N| = n$  adalah:

$$\alpha(K_{m,n}) = \min\{|M|, |N|\}$$

Bukti:

Misalkan  $K_{m,n}$  graf bipartit komplit dengan partisi  $M = \{v_i | 1 \leq i \leq m\}$  dan  $N = \{u_i | 1 \leq i \leq n\}$ .

Dibagi menjadi 3 kasus, yakni:

1. Untuk  $m = n$

Andaikan  $C$  adalah penutup titik dari  $K_{m,n}$ . Klaim  $C = \{v_i | 1 \leq i \leq m\}$ . Akan ditunjukkan bahwa  $C$  adalah minimum penutup titik. Berdasar definisi graf bipartit komplit setiap titik di lain partisi akan saling berhubungan langsung, sedangkan titik yang berada dalam satu partisi tidak saling berhubungan langsung. Akibatnya titik  $v_1$  mengcover  $n$  sisi dari  $K_{m,n}$ , titik  $v_2$  mengcover  $n$  sisi dari  $K_{m,n}$ , titik  $v_m$  mengcover  $n$  sisi dari  $K_{m,n}$  sehingga diperoleh titik  $v_i$  mengcover  $n \cdot m$  sisi dari  $K_{m,n}$  demikian juga dengan titik  $u_i$  mengcover  $n \cdot m$  sisi dari  $K_{m,n}$ . Semua sisi pada  $K_{m,n}$  telah tercover oleh titik-titik di  $C$ .  $C$  merupakan minimum penutup titik dari  $K_{m,n}$ , karena tidak ada penutup titik  $C'$  pada  $K_{m,n}$  sedemikian hingga  $|C'| < |C|$ .

Diperoleh minimum penutup titik pada graf bipartit komplit  $K_{m,n}$ ,  $m = n$  adalah  $\alpha(K_{m,n}) = |C| = |M| = m$ .

2. Untuk  $m < n$

Andaikan  $C$  adalah penutup titik  $K_{m,n}$ . Akan ditunjukkan bahwa  $C$  adalah minimum penutup titik. Berdasar definisi graf bipartit komplit setiap titik di lain partisi saling berhubungan langsung, sedangkan titik yang berada dalam satu partisi tidak berhubungan langsung. Jika titik di  $N$  dipilih oleh  $C$  maka  $v_1$  mengcover  $n$  sisi  $K_{m,n}$ , titik  $v_2$  mengcover  $n$  sisi  $K_{m,n}$ , dan seterusnya sampai titik  $v_m$  mengcover  $n$  sisi  $K_{m,n}$  sehingga diperoleh titik  $v_i$  mengcover  $n \cdot m$  sisi  $K_{m,n}$ . Demikian juga jika titik di  $M$  dipilih oleh  $C$  maka  $u_i$  mengcover  $m \cdot n$  sisi  $K_{m,n}$ .

Karena  $m < n$ , pilih  $C = \{v_i | 1 \leq i \leq m\}$  sebagai minimum penutup titik, karena tidak ada penutup titik  $C'$  pada  $K_{m,n}$  sedemikian hingga  $|C'| < |C|$ .

Diperoleh titik minimum penutup pada graf bipartit komplit  $K_{m,n}$ ,  $m = n$  adalah  $\alpha(K_{m,n}) = |C| = |M| = m$ . Diperoleh minimum titik penutup pada graf bipartit komplit  $K_{m,n}$ ,  $m < n$  adalah  $\alpha(K_{m,n}) = |C| = |M| = m$ .

3. Untuk  $m > n$



Andaikan  $C$  adalah penutup titik  $K_{m,n}$ . Akan ditunjukkan bahwa  $C$  adalah minimum penutup titik. Berdasar definisi graf bipartit komplit setiap titik di lain partisi akan saling berhubungan langsung, sedangkan titik yang berada dalam satu partisi tidak saling berhubungan langsung. Jika titik  $v_i$  dipilih oleh  $C$  maka  $v_1$  mengcover  $n$  sisi dari  $K_{m,n}$ , titik  $v_2$  mengcover  $n$  sisi dari  $K_{m,n}$ , dan seterusnya sampai titik  $v_m$  mengcover  $n$  sisi dari  $K_{m,n}$  sehingga diperoleh titik  $v_i$  mengcover  $n \cdot m$  sisi dari  $K_{m,n}$ . Demikian juga jika titik  $u_i$  dipilih oleh  $C$  maka  $u_i$  mengcover  $m \cdot n$  sisi dari  $K_{m,n}$ .

Karena  $m > n$ , pilih  $C = \{u_i | 1 \leq i \leq n\}$  sebagai minimum penutup titik, karena tidak ada penutup titik  $C'$  pada  $K_{m,n}$  sedemikian hingga  $|C'| < |C|$ .

Diperoleh minimum penutup titik pada graf bipartit komplit  $K_{m,n}$ ,  $m = n$  adalah  $\alpha(K_{m,n}) = |C| = |M| = m$ . Diperoleh ukuran minimum titik penutup pada graf bipartit komplit  $K_{m,n}$ ,  $m > n$  adalah  $\alpha(K_{m,n}) = |C| = |N| = n$ .

Berdasar 1, 2, dan 3 diperoleh  $\alpha(K_{m,n}) = \min\{|M|, |N|\}$ .

#### Lemma 4:

$$\alpha_1(K_{m,n}) = \max\{|M|, |N|\}$$

Bukti:

Misal  $K_{m,n}$  graf bipartit komplit dengan partisi  $M = \{v_i | 1 \leq i \leq m\}$  dan  $N = \{u_i | 1 \leq i \leq n\}$ .

Dibagi menjadi 3 kasus, yakni:

##### 1. Untuk $m = n$

Andaikan  $Q$  adalah penutup sisi  $K_{m,n}$ . Klaim  $Q = \{v_i u_i | 1 \leq i \leq m\}$ . Akan ditunjukkan bahwa  $Q$  adalah minimum penutup sisi. Berdasar definisi graf bipartit komplit setiap titik di lain partisi akan saling berhubungan langsung, sedangkan titik yang berada dalam satu partisi tidak saling berhubungan langsung. Sisi  $v_1 u_1$  dipilih oleh  $Q$  maka sisi  $v_1 u_1$  mengcover titik  $v_1$  dan  $u_1$ , sisi  $v_2 u_2$  dipilih oleh  $Q$  maka sisi  $v_2 u_2$  mengcover titik  $v_2$  dan  $u_2$ , sisi  $v_3 u_3$  dipilih oleh  $Q$  maka sisi  $v_3 u_3$  mengcover titik  $v_3$  dan  $u_3$ , seterusnya sampai sisi  $v_m u_m$  dipilih oleh  $Q$  maka sisi  $v_m u_m$  mengcover titik  $v_m$  dan  $u_m$ . Karena  $m = n$  maka sisi  $v_i u_i$  mengcover  $m + n$  titik dari  $K_{m,n}$ , dengan demikian semua titik dari  $K_{m,n}$  telah tercover oleh  $Q$ .  $Q$  merupakan minimum penutup sisi dari  $K_{m,n}$ , karena tidak ada penutup sisi  $Q'$  pada  $K_{m,n}$  sedemikian hingga  $|Q'| < |Q|$ .

Diperoleh ukuran minimum penutup sisi pada graf bipartit komplit  $K_{m,n}$ ,  $m = n$  adalah  $\alpha_1(K_{m,n}) = |Q| = |M| = m$ .

##### 2. Untuk $m < n$

Andaikan  $Q$  adalah penutup sisi  $K_{m,n}$ , klaim  $Q = \{v_1 u_1, v_2 u_2, v_3 u_3, \dots, v_m u_m, v_1 u_{m+1}, v_1 u_{m+2}, \dots, v_1 u_n\}$ . Karena  $m < n$  maka sisi  $v_i u_i$ ,  $1 \leq i \leq m$  mengcover  $2 \cdot m$  titik dari  $K_{m,n}$ . Selanjutnya sisi  $v_1 u_{m+1}$  dipilih  $Q$  maka sisi  $v_1 u_{m+1}$  mengcover titik  $v_1$  dan  $u_{m+1}$ , sisi  $v_1 u_{m+2}$  dipilih  $Q$  maka sisi  $v_1 u_{m+2}$  mengcover titik  $v_1$  dan  $u_{m+2}$ , seterusnya sampai sisi  $v_1 u_n$  dipilih  $Q$  maka sisi  $v_1 u_n$  mengcover titik  $v_1$  dan  $u_n$ . Sisi  $v_1 u_{m+1}, v_1 u_{m+2}, \dots, v_1 u_n$  mengcover  $n - m$  titik dari  $K_{m,n}$ , diperoleh banyaknya titik yang tercover oleh  $Q$  adalah  $(2 \cdot m) + (n - m) = m + n$ .

Dengan demikian semua titik dari  $K_{m,n}$  telah tercover oleh  $Q$ .  $Q$  merupakan penutup sisi minimum dari  $K_{m,n}$ , karena tidak ada penutup sisi  $Q'$  pada  $K_{m,n}$  sedemikian hingga  $|Q'| < |Q|$ . Diperoleh ukuran minimum penutup sisi pada graf bipartit komplit  $K_{m,n}$ ,  $m < n$  adalah  $\alpha_1(K_{m,n}) = |Q| = n$ .

##### 3. Untuk $m > n$

Andaikan  $Q$  adalah penutup sisi  $K_{m,n}$ . Klaim

$$Q = \{v_1 u_1, v_2 u_2, \dots, v_n u_n, v_{n+1} u_1, v_{n+2} u_1, \dots, v_m u_1\}.$$

Akan dibuktikan  $Q$  merupakan minimum penutup sisi. Sama seperti pada kasus 1, sisi  $v_i u_i$  dipilih oleh  $Q$ . Karena  $m > n$  maka sisi  $v_i u_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  mengcover  $2 \cdot n$  titik dari  $K_{m,n}$ . Selanjutnya sisi  $v_{n+1} u_1$  dipilih  $Q$  maka sisi  $v_{n+1} u_1$  mengcover titik  $v_{n+1}$  dan  $u_1$ , sisi  $v_{n+2} u_1$  dipilih  $Q$  maka sisi  $v_{n+2} u_1$  mengcover titik  $v_{n+2}$  dan  $u_1$ , seterusnya sampai sisi  $v_m u_1$  dipilih  $Q$  maka sisi  $v_m u_1$  mengcover titik  $v_m$  dan  $u_1$ . Sisi  $v_i u_i$ ,  $v_{n+1} u_1, v_{n+2} u_1, \dots, v_m u_1$  mengcover  $m - n$  titik dari  $K_{m,n}$ , diperoleh banyaknya titik yang tercover oleh  $Q$  adalah  $(2 \cdot n) + (m - n) = n + m$ . Dengan demikian semua titik dari  $K_{m,n}$  telah tercover oleh  $Q$ .  $Q$  merupakan minimum penutup sisi dari  $K_{m,n}$ , karena tidak ada penutup sisi  $Q'$  pada  $K_{m,n}$  sedemikian hingga  $|Q'| < |Q|$ . Diperoleh ukuran minimum penutup sisi pada graf bipartit komplit  $K_{m,n}$ ,  $m > n$  adalah  $\alpha_1(K_{m,n}) = |Q| = m$ .

Berdasar 1, 2, dan 3 diperoleh  $\alpha_1(K_{m,n}) = \max\{|M|, |N|\}$ .

## 4. PENUTUP

### 4.1 Kesimpulan

Berdasarkan hasil pembahasan pada bab III, maka dapat diambil kesimpulan sebagai berikut:

1. Ukuran minimum penutup titik minimum dan minimum penutup sisi pada graf komplit  $K_n$  dengan  $n \in \mathbb{N}$  masing-masing adalah:

$$\alpha(K_n) = n - 1 \text{ dan } \alpha_1(K_n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{untuk } n \text{ genap} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{untuk } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

2. Ukuran minimum penutup titik minimum dan minimum penutup sisi pada graf bipartit komplit  $K_{m,n}$  dengan  $m, n \in \mathbb{N}$  masing-masing adalah:

$$\alpha(K_{m,n}) = \min\{|M|, |N|\} \text{ dan}$$

$$\alpha_1(K_{m,n}) = \max\{|M|, |N|\}$$

#### 4.2 Saran

Pada makalah ini, penulis hanya memfokuskan pada pokok bahasan minimum penutup titik dan minimum penutup sisi pada graf komplit dan graf bipartit komplit. Maka dari itu, untuk penulisan makalah selanjutnya, penulis menyarankan kepada pembaca untuk mengkaji masalah  $\alpha(G)$  dan  $\alpha_1(G)$  pada graf-graf yang lain.

#### DAFTAR PUSTAKA

- Chatrand, Gery and Lesniak, Linda. 1986. *Graphs and Digraphs Second Edition*. California: a Division of Wadsworth, Inc.
- Babak Behsaz, Pooya Hatami, and Ebadollah S. Mahmoodian. 2006. *On minimum vertex cover of generalized Petersen graphs*. Australasian J. Combin.   
 <http://sina.sharif.edu/~emahmood/papers/MR2381433.pdf>. Diakses 25 September 2013.
- Budayasa, K. 2003. *Teori Graf dan Aplikasinya*. Surabaya: Unesa University Press.
- Hijriyah N dan Irawan W. 2012. Titik dan Sisi Penutup Minimal pada Graf Bintang  $(m)_C S_n^k$  dan Graf Roda  $(m)_C W_n^k$ . Jurnal Chaucy.   
 <http://ejournal.uinmalang.ac.id/index.php/Math/article/view/2224/pdf>. Diakses 11 Februari 2014.
- M. Behzad, P. Hatami, and E.S Mahmoodian. 2006. Minimum vertex cover of generalized Petersen graph  $P(n,2)$ .   
 <http://sina.sharif.edu/~emahmood/papers/MR2521808.pdf>. Diakses 25 September 2013.